ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 2. С. 196–207

СУЩНОСТЬ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

А. Б. Пестов *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дано теоретическое описание темной материи в рамках полевой теории гравитации. Темной материи ставится в соответствие общековариантное неабелево калибровочное поле, синглетное состояние которого представляет собой электромагнитное поле. Это калибровочное поле взаимодействует только с гравитационным полем и не взаимодействует с фермионной материей. Механизм генерации массы общековариантного неабелева калибровочного поля присущ самому этому полю и не требует введения каких-либо дополнительных полей. Показано, что возможности наблюдения и использования нового источника энергии связаны главным образом с общековариантным законом сохранения энергии, справедливым для всех случаев.

The theoretical description of the dark matter is realized in the framework of the field theory of gravity. We put in correspondence to the dark matter a unique general covariant nonabelian gauge field that serves as a principal source of the gravitational field on a large scale and does not interact with the spinor field. The electromagnetic field is a singlet state of this gauge field. The intrinsic mechanism for the emergence of the mass of the fundamental gauge field is provided by the field itself. It is shown that possibilities to observe and use this new form of energy are tightly connected with general covariant law of energy conservation that is true in all cases.

PACS: 44.25.+f; 44.90.+c

ВВЕДЕНИЕ

Идея построения теории гравитации на основе полевых представлений была выдвинута Эйнштейном. В 1913 г. было введено тензорное гравитационное поле [1], что позволило в 1915 г. объяснить вращение перигелия Меркурия. Последующие исследования Эйнштейна фактически были направлены на поиск поля, которое могло бы быть носителем гравитационного заряда, в чем-то аналогичного элементарному электрическому заряду. Поиск полевой теории гравитации продолжался вплоть до 1955 г. [2] и не был полностью завершен. Для сравнения отметим, что возможность построения электродинамики на основе полевых представлений была открыта Шредингером и Дираком соответственно в 1926 и 1928 гг. установлением уравнений Максвелла–Шредингера и Максвелла–Дирака и введением соответствующих полей в качестве

* E-mail: pestov@theor.jinr.ru

возможных носителей электрического заряда. Фактически была решена задача описания правой стороны уравнений Максвелла в рамках полевых представлений. На основе этих уравнений был успешно объяснен наблюдаемый спектр атома водорода. Развитие полевой теории элекродинамики (квантовой механики) на основе уравнений Максвелла–Дирака привело к созданию Стандартной модели. Идея калибровочной или внутренней симметрии, впервые выдвинутая Вейлем в 1918 г. на основе общековариантных представлений теории Эйнштейна, получила в Стандартной модели основополагающее значение, но не нашла эвристического применения в самой общей теории относительности. Преобразования внутренней симметрии неотделимы от полевых представлений, так как они касаются функций поля и не затрагивают координат. Таким образом, внутренняя симметрия соответствует явлениям, которые не могут быть описаны на основе классических представлений. Однако Стандартная модель не является полностью завершенной полевой теорией электродинамики, так как не ясна природа кварк-лептонной симметрии, числа поколений и конфайнмента.

Задача описания правой стороны уравнения Эйнштейна на основе полевых представлений была решена в работе [3] на основе общековариантных геометрических представлений и тесно связанной с ними общековариантной калибровочной симметрии. Настоящая работа посвящена физической интерпретации полученных в указанной работе результатов, в том числе и в контексте проблемы так называемой темной материи и темной энергии. Существование темной материи предсказывается наблюдениями в космологических масштабах. Обнаружение темной материи в лабораторных экспериментах вызывает большие затруднения, в том числе и по причине существования огромного числа всевозможных моделей.

ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Рассмотрим некоторые представления, связанные с общековариантным неабелевым калибровочным полем, которое является носителем элементарного гравитационного заряда, характеризующего рассматриваемую систему полей. Поле Дирака является носителем элементарного электрического заряда, который обозначается буквой e. Величина $(e/\hbar c)A_i$, где A_i есть векторный потенциал электромагнитного поля, имеет размерность обратной длины. Следовательно, такую же размерность имеет и величина $1/eA_i$. Переменные x^0, x^1, x^2, x^3 имеют размерность длины. Таким образом, в рамках полевой теории Максвелла–Дирака естественно оперировать с величинами и параметрами, имеющими размерность длины в соответствующей степени. Лагранжиан, описывающий правую сторону уравнений Максвелла, записывается тогда в виде $\mathcal{L}_i = \alpha A_i J^i$, где α есть постоянная тонкой структуры, а J^i есть ток, определяемый полем Дирака, которому приписывается размерность длины в степени $-3/2$.

Из геометрических соображений следует, что потенциал P^i_{jk} общековариантного неабелева калибровочного поля, которое будет называться К-полем, имеет размерность обратной длины и, следовательно, соответствующее действие безразмерно. Это дает основание ввести, по аналогии с полевой электродинамикой, элементарный гравитационный заряд $e_g = m\sqrt{G}$ и записать изначально лагранжиан полевой теории гравитации. Согласно [3] лагранжианы К-поля и его синглетного состояния записываются в следующем виде:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}^{ij}) + \frac{\mu^2}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}^i), \quad \mathcal{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij},$$

где $\mathcal{L}_P$ есть лагранжиан собственно К-поля, $\mathcal{L}_{\mathrm{em}}$ — лагранжиан его синглетного состояния, а μ — постоянная размерности обратной длины. Для эйнштейновского потенциала гравитационного поля лагранжиан записываем в виде $\mathcal{L}_g = (l_g^2/2)R$, где l_g есть постоянная размерности обратной длины (см$^{-1}$). Таким образом, искомый лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \alpha_g(\mathcal{L}_P + \mathcal{L}_{\mathrm{em}}),$$

где $\alpha_g = e_g^2/\hbar c$ — гравитационная безразмерная постоянная, аналогичная электродинамической безразмерной постоянной. Найдем значения всех постоянных полевой теории гравитации. Постоянную l_g^2 можно связать с элементарным гравитационным зарядом по формуле

$$l_g^2 = \frac{c^4}{e_g^2 G}.$$

Не делая различия между тяжелой и инертной массами, полагаем $\mu = mc/\hbar$. Приравнивая μ и l_g, находим, что гравитационная безразмерная постоянная равна единице и, следовательно, квадрат отношения элементарного электрического заряда к элементарному гравитационному заряду равен постоянной тонкой структуры:

$$\alpha_g = 1, \quad \left(\frac{e}{e_g}\right)^2 = \alpha.$$

Таким образом, элементарный гравитационный заряд эйнштейновской полевой теории гравитации при довольно естественных условиях совпадает с планковским зарядом. Записанный выше фундаментальный лагранжиан не является, однако, окончательным по следующей причине.

В общей теории относительности исчезли из обращения электрические и магнитные поля, которые были заменены тензором электромагнитного поля $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Такое положение дел не может рассматриваться как удовлетворительное, поскольку существуют конденсаторы и магниты, и этот факт должен найти адекватное отражение в основах общековариантной полевой теории гравитации. Тензор электромагнитного поля представлен шестью функциями, и такое же количество функций в сумме имеют электрическое и магнитное поля. Проблема в том, чтобы найти общековариантное взаимно однозначное соответствие между этими величинами. В качестве первого очевидного шага в нужном направлении можно просто положить $E_i = t^k F_{ik}$. Однако мы не знаем ничего о природе и физическом смысле векторного поля t^i.

Чтобы прояснить эту запутанную ситуацию, рассмотрим квадратичную форму $\varphi = g_{ij} u^i u^j$, определяемую эйнштейновским потенциалом в линейном пространстве векторных полей. Форма φ может принимать положительные, отрицательные или равные нулю значения. Точно такими же свойствами обладает скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в обычной векторной алгебре. Однако скалярное произведение при $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ положительно и равно нулю только при $\mathbf{x} = 0$. Достичь полного соответствия все же возможно, если вектор $\mathbf{y}$ рассматривать как результат действия на вектор $\mathbf{x}$ заданного линейного оператора. Более того, полагая, что вектор $\mathbf{y}$ есть результат применения к вектору $\mathbf{x}$ преобразования зеркальной симметрии, определяемого заданным вектором $\mathbf{t}$, т. е.

$$\mathbf{y} = 2\mathbf{t}\frac{(\mathbf{t}, \mathbf{x})}{(\mathbf{t}, \mathbf{t})} - \mathbf{x},$$

приходим к следующему результату. Вводя орты, направленные вдоль осей x и y, а за орт, направленный вдоль оси z, выбирая вектор $\mathbf{t}$, получим, что квадратичная форма $s = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ представляет собой интервал специальной теории относительности в трехмерном пространстве. Обобщение на четырехмерный случай очевидно. Теперь достаточно понятно, как осуществить общековариантное обобщение понятия интервала, чтобы попытаться оценить его значение в полевой теории гравитации.

Рассмотрим обобщение понятия линейного пространства, полагая, что векторные поля $u^i(x)$ являются элементами общековариантного пространства L_g, в котором умножение на действительное число заменяется умножением на скалярные поля. Очевидно, что $w^i(x) = a(x)u^i(x) + b(x)v^i(x)$ снова есть элемент L_g. Ковекторные поля $u_i(x)$ являются элементами дуального пространства $\widetilde{L}_g$. Пусть симметричное тензорное поле f_{ij} определяет скалярное произведение в пространстве L_g, аналогичное $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$(u|v) = f_{ij} u^i v^j, \quad (u|u) = f_{ij} u^i u^j \geqslant 0, \quad (u|u) = 0,$$
$$\text{если и только если } u^i = 0.$$

Для скалярного поля $\varphi = (u|v)/\sqrt{(u|u)}\sqrt{(v|v)}$ имеем $-1 \leqslant \varphi \leqslant 1$, но, очевидно, что мы не можем говорить об угле между двумя векторными полями, так как из уравнения $\cos\alpha = \varphi$ следует, что α есть функция от x. Можно только доказать, что существуют ортогональные векторные поля. Действительно, если $(u|v) \neq 0$, то мы полагаем $w^i = v^i - (u|v)u^i/(u|u)$, и, следовательно, u^i и w^i ортогональны, $(u|w) = 0$ для любых x.

Пространство L_g имеет примечательные свойства. Для естественного и конструктивного введения общековариантного линейного оператора нет необходимости вводить линейно независимые векторные поля $v^i_\mu(x)$, как в абстрактной теории линейных пространств, так как роль линейных операторов в рассматриваемом случае исполняют тензорные поля $S^i_j(x)$ типа (1,1). Мы рассматриваем общековариантное уравнение

$$\overline{V}^i(x) = S^i_j(x)V^j(x)$$

как определение линейного оператора в пространстве L_g и фундаментального представления общековариантной калибровочной группы полевой теории гравитации. Произведение двух операторов определяется очевидным образом: $P^i_j(x) = S^i_k(x)T^k_j(x)$. В общем случае эти операторы не коммутируют, и, следовательно, калибровочная группа неабелева. Общековариантное преобразование зеркальной симметрии в пространстве L_g определяется вполне аналогично случаю обычного векторного пространства. Пара векторных полей v и $\overline{v}$ обладает общековариантной зеркальной симметрией по отношению к заданному векторному полю t^i, $(t|t) = 1$, если сумма этих полей коллинеарна t^i, а их разность ортогональна t^i: $\overline{v} + v = \lambda t$, $(\overline{v}|t) = (v|t)$, где $(u|v)$ — скалярное произведение, определенное выше, и поэтому $\overline{v}^i = (2t^it_j - \delta^i_j)v^j$, $v^i = (2t^it_j - \delta^i_j)\,\overline{v}^j$. Из определения следует, что связь между правосторонними и левосторонними векторными полями может быть представлена оператором

$$R^i_j = 2t^it_j - \delta^i_j, \quad R^i_kR^k_j = \delta^i_j, \quad \mathrm{Det}\,(R^i_j) = -1.$$

Поля t^i и f_{ij} инвариантны относительно отражения, так как $R^i_jt^j = t^i$, $R^i_kR^j_lf_{ij} = f_{kl}$.

Так как эйнштейновский потенциал должен определять общековариантный интервал, необходимо потребовать выполнения равенств

$$g_{ij} = f_{ik}R^k_j = 2t_it_j - f_{ij}, \quad g^{ij} = f^{ik}R^j_k = 2t^it^j - f^{ij}.$$

Эти фундаментальные уравнения являются сильным аргументом для выдвижения идеи, что общековариантная зеркальная симметрия представляет собой строгую и фундаментальную симметрию природы, и, следовательно, в естественных физических процессах правосторонние общековариантные физические величины всегда появляются в паре с левосторонними величинами.

Наша исходная мотивация выглядит эвристической, так как мы установили, что понятие интервала и в частном, и в общем случае определяется зеркальной симметрией, а не группой Лоренца, и, кроме того, сейчас ясно, как ввести общековариантные понятия электрического и магнитного полей. Предварительно нужно только решить вопрос о том, как не увеличивать числа неизвестных функций. Нужное условие состоит в том, чтобы положить $t_i = \partial_i f$, $t^i = f^{ij}t_j$. Тогда уравнение $(t|t) = 1$ запишется в виде общековариантного обобщения уравнения геометрической оптики

$$f^{ij}\partial_i f\partial_j f = 1. \tag{1}$$

Физический смысл этого уравнения будет ясен из дальнейшего. Таким образом, в окончательном виде эйнштейновский потенциал определяется уравнениями

$$g_{ij} = 2\partial_i f \partial_j f - f_{ij}, \quad t^i = f^{ij}\partial_j f, \quad f^{ij}\partial_i f \partial_j f = 1. \tag{2}$$

Будем называть $f(x)$ скалярной составляющей эйнштейновского потенциала, а f_{ij} — римановской составляющей. После сделанных разъяснений общековариантное определение электрического и магнитного полей осуществляется без мнемонических правил следующим образом.

Пусть e_{ijkl} есть антисимметричный тензор Леви-Чивита, определяемый f_{ij}, $e_{1234} = \sqrt{d}$, где $d = \mathrm{Det}\,(f_{ij}) > 0$; $e^{ijkl} = f^{im}f^{jn}f^{kr}f^{ls}e_{mnrs}$, $e^{1234} = \sqrt{1/d}$. Полагаем $\widetilde{F}_{ij} = (1/2)e_{ijkl}F^{kl}$, $F^{kl} = f^{ki}f^{lj}F_{ij}$ и вводим общековариантные электрические и магнитные поля:

$$E_i = t^k F_{ik}, \quad H_i = t^k \widetilde{F}_{ik}. \tag{3}$$

Из определения очевидно, что $(t|E) = (t|H) = 0$. Если полагать E и H заданными, тогда F находится по формуле обращения

$$F_{ij} = -t_i E_j + t_j E_i - e_{ijkl}\, t^k H^l, \tag{4}$$

вывод которой мы опускаем. Вывод общековариантных уравнений Максвелла для так определенных электрического и магнитного полей требует формулировки общековариантных базовых соотношений векторной алгебры и векторного анализа.

Скалярное произведение $(A|B)$ векторных полей $A^i B^i$ было определено выше. Их векторное произведение $C = [A \times B]$ определяется следующим образом:

$$C^i = [A \times B]^i = e^{ijkl}\, t_j A_k B_l, \quad A_k = f_{kl}A^l.$$

Выполняются следующие общековариантные аналоги основных соотношений векторной алгебры и анализа: $[A \times B] + [B \times A] = 0$,

$$|[A \times B]| = |A||B|\sin\alpha, \quad [A \times [B \times C]] = B(A|C) - C(A|B),$$

$$[ABC] = [BCA] = [CAB], \quad [ABC] = (A|[B \times C]),$$

$$\mathrm{div}\, A = \frac{1}{\sqrt{d}}\partial_i(\sqrt{d}\, A^i), \quad (\mathrm{grad}\,\phi)^i = f^{ij}\partial_j\phi,$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \frac{1}{\sqrt{d}}\partial_i(\sqrt{d}\, f^{ij}\partial_j\phi) = \nabla_i\nabla^i\phi,$$

где ∇_i есть ковариантная производная относительно связности, принадлежащей f_{ij}. Ротор векторного поля A вводится как векторное произведение 4d-оператора ∇ и A,

$$(\mathrm{rot}\, A)^i = [\nabla \times A]^i = e^{ijkl}\, t_j\partial_k A_l = \frac{1}{2}e^{ijkl}\, t_j(\partial_k A_l - \partial_l A_k).$$

Имеем
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0.$$

Пусть Γ^i_{kj} есть символы Кристоффеля эйнштейновского потенциала g_{ij}, а K^i_{kj} — символы Кристоффеля f_{ij}. Зная связь между g_{ij} и f_{ij}, находим связь между соответствующими символами Кристоффеля $\Gamma^i_{kj} = K^i_{kj} + 2t^i\nabla_k t_j$. Отсюда следует, что предлагаемые общей теорией относительности уравнения для тензора электромагнитного поля могут быть записаны в форме
$$\nabla_i \widetilde{F}^{ij} = 0, \quad \nabla_i \overline{F}^{ij} = 0, \tag{5}$$
где $\widetilde{F}^{ij} = (1/2)e^{ijkl}\,F_{kl}$, $\overline{F}^{ij} = f^{ik}f^{jl}F_{kl}$. Имеем
$$\widetilde{F}^{ij} = -t^iH^j + t^jH^i - e^{ijkl}\,t_kE_l, \quad \overline{F}^{ij} = t^iE^j - t^jE^i - e^{ijkl}\,t_kH_l. \tag{6}$$
Подставляя эти выражения в записанные выше уравнения (5) для тензора электромагнитного поля, получаем, после некоторых преобразований, общековариантные уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей:
$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{\sqrt{d}}D_t(\sqrt{d}\,H), \quad \operatorname{rot} H = \frac{1}{\sqrt{d}}D_t(\sqrt{d}\,E), \tag{7}$$
$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} H = 0, \tag{8}$$
где D_t есть производная Ли $(D_tE)^i = t^k\partial_kE^i - E^k\partial_kt^i$. Общековариантный тензор энергии-импульса электромагнитного поля может быть представлен в форме
$$T_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij}(E^2 + H^2) - E_iE_j - H_iH_j - t_i\Pi_j - t_j\Pi_i, \tag{9}$$
где $\Pi_i = f_{ij}\Pi^j$ есть компоненты общековариантного вектора Пойнтинга
$$\Pi^i = e^{ijkl}\,t_jE_kH_l, \quad \Pi = [E \times H].$$
Для плотности энергии электромагнитного поля находим
$$\varepsilon_m = t^it^jT_{ij} = \frac{1}{2}(E^2 + H^2).$$
В аналогичной форме можно записать и тензор энергии-импульса К-поля.

Резюме. Из проведенного рассмотрения следует, что градиент скалярной составляющей $f(x)$ является прямым свидетельством существования естественного времени, которое не зависит от наблюдателей и акта наблюдения. Чтобы читатели более наглядно могли воспринять определение времени, данное ниже, обратимся к явлениям, связанным с перепадом температуры и давления, которые предполагаются заданными в области пространства. Тогда направление потока тепла и ветра определяется градиентом температурного поля и поля давления, но для существования этих потоков и связанных с ними явлений необходимо, чтобы существовал градиент соответствующих полей. Таким образом, естественно поставить вопрос о существовании поля времени, в данном случае это $f(x)$, и явлениях, связанных с существованием градиента этого поля. Отсюда следует, что независимые переменные x^1, $x^2, \ldots, x^n$ в полевой теории гравитации должны рассматриваться на абсолютно равном основании не формально, а по существу дела, образуя пространство отсчета R^n, точка которого определяется как строка

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad -\infty < x^i < \infty.$$

Из факта существования в природе электрического и магнитного полей следует, что размерность пространства отсчета равна четырем и в последующем будут рассматриваться только функции четырех независимых переменных.

Определение. Поле естественного времени отождествляется со скалярной составляющей эйнштейновского потенциала $f(x)$. Момент t — это число, которому приписывается размерность длины и которое определяется уравнением $t = f(x^1, x^2, x^3 x^4) = f(x)$. Все точки пространства отсчета, соответствующие одному и тому же моменту t, образуют физическое пространство $S(t)$ или изохрону. Точки $S(t)$ определяются уравнением $f(x^1, x^2, x^3 x^4) = f(x) = t = \text{const}$. Пространство отсчета, заполненное полем времени, называется пространством событий.

Градиентом естественного времени называется векторное поле $t^i = (\nabla f)^i = f^{ij}\partial_j f = f^{ij} t_j$. Эйнштейновский потенциал обеспечивает прямой метод рассмотрения динамических процессов введением градиента естественного времени в лагранжианы фундаментальных полей согласно уравнению (2).

Так как поле времени входит в лагранжианы фундаментальных физических полей в форме градиента скалярного поля $t_i = \partial_i f(x)$, законы самой Природы инвариантны относительно преобразований вида $f(x) \Rightarrow f(x) + a$, где a есть постоянная. Эта симметрия определяет закон сохранения энергии как фундаментальный физический закон, который выполняется во всех случаях. Согласно уравнениям Максвелла (7) и (8) в общековариантной теории оператор взятия производной вдоль градиента естественного времени $D_t = t^k \partial_k$ является производной по времени. Таким образом, общековариантным аналогом коммутационного соотношения $[\partial\, \partial t, t] = 1$ является соотношение $[D_t, f(x)] = 1$, которое выполняется при условии $f^{ij}\partial_i f \partial_j f = 1$. Это определяет физический смысл уравнения (1).

Важное с физической точки зрения наблюдение состоит в том, что уравнение (1) имеет не только общее решение, но и специальное решение, известное в математике как функция геодезического расстояния. Это означает, что в Природе существуют два времени и, следовательно, два вида динамических процессов. Для конкретности рассмотрим важный пример. Пусть $f_{ij} = \delta_{ij}$, тогда нетрудно убедиться, что уравнение (1) имеет общее решение $f(x) = a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$, для которого $a_i = t_i$ и, следовательно, $(a|a) = 1$. Кроме того, существует специальное решение $f(x) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}$. Изохрона в первом случае определяется уравнением $f(x) = a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = t = \mathrm{const}$ и представляет собой трехмерное евклидово пространство. Во втором случае изохрона определяется уравнением

$$f(x) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} = \tau = \mathrm{const}$$

и представляет собой трехмерную сферу. Симметрии евклидова пространства включают в себя переносы и вращения, тогда как симметрии трехмерного сферического пространства совпадают с симметриями, которые присущи сферическому волчку. Отсюда следует, что точечная частица в евклидовом пространстве характеризуется импульсом и угловым моментом, а точечная частица в сферическом пространстве характеризуется двумя угловыми моментами. Отсюда заключаем, что вращательное движение представляет собой фундаментальную форму движения, и, следовательно, каждой частице соответствует дуальная частица, что естественным образом позволяет объяснить упомянутые выше трудности Стандартной модели. Восстановление статуса электрического и магнитного полей в полевой теории гравитации позволило дать определение естественного времени как ключевого понятия физической теории относительности. На основе сказанного выше сейчас есть все необходимое для вывода уравнений Эйнштейна физической полевой теории гравитации. Остановимся только на определениях и окончательных результатах. Так как эйнштейновский потенциал определяется двумя полями, связанными уравнением (1), к исходному лагранжиану следует добавить лагранжиан вида $\mathcal{L}_\varepsilon = (1/2)\varepsilon(f^{ij} t_i t_j - 1)$, где $\varepsilon = \varepsilon(x)$ есть множитель Лагранжа, и рассматривать компоненты f_{ij} и f как независимые переменные. Из вариационного принципа находим уравнения Эйнштейна полевой теории гравитации:

$$G_{ij} + T_{ij} = \varepsilon \partial_i f\, \partial_j f, \quad g^{ij} \partial_i f\, \partial_j f = 1, \tag{10}$$

$$\nabla_k(\varepsilon t^k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \partial_i(\sqrt{d}\, t^i) = 0. \tag{11}$$

Из (9) следует, что

$$\varepsilon = G_{ij} t^i t^j + T_{ij} t^i t^j = \varepsilon_g + \varepsilon_m, \tag{12}$$

где $\varepsilon_g = G_{ij} t^i t^j = (1/2) R_{ij} f^{ij}$ — плотность энергии гравитационного поля и $\varepsilon_m = T_{ij} t^i t^j$ — суммарная плотность энергии K-поля и электромагнитного поля. Покажем, что производная по времени от $(\sqrt{d}\,\varepsilon)$ равна нулю и, следовательно, эта величина является первым интегралом. Имеем $D_t(\sqrt{d}\,\varepsilon) = t^i \partial_i(\sqrt{d}\,\varepsilon) + \sqrt{d}\,\varepsilon \partial_i t^i = \partial_i(\sqrt{d}\,\varepsilon t^i) = 0$ согласно (11).

Дадим теперь полевое определение импульса гравитационного поля P^i_j, полагая

$$P^i_j = \frac{1}{2} f^{ik} D_t f_{jk} = \frac{1}{2} f^{ik} (\nabla_j t_k + \nabla_k t_j) = f^{ik} \nabla_j t_k = \nabla_j t^i.$$

Приведем наиболее важные характеристики импульса гравитационного поля. Соотношения

$$t_i P^i_j = 0, \quad t^j P^i_j = 0, \quad g^{ik} P^l_k g_{lj} = P^i_j$$

означают, что импульс является физической величиной и самосопряженным оператором относительно общековариантного скалярного произведения.

Запишем уравнения Эйнштейна как уравнения для импульса гравитационного поля, что позволяет ввести фундаментальное понятие вектора потока энергии гравитационного поля и представить плотность энергии гравитационного поля как сумму плотностей кинетической и потенциальной энергии этого поля. С этой целью введем тензор напряжений гравитационного поля S^i_j, полагая

$$S^i_j = h^i_k K^k_l h^l_j + D_{\mathbf{t}} P^i_j + \varphi P^i_j, \tag{13}$$

где K^k_l есть тензор Риччи f_{ij}, а $h^i_j = \delta^i_j - t^i t_j$ — проекционный оператор, $h^i_k h^k_j = h^i_j$. Отсюда следует, что

$$S = TrS = K + 2D_{\mathbf{t}}\varphi + \varphi^2 + P^i_j P^j_i, \quad \varphi = \nabla_i t^i. \tag{14}$$

Так как

$$R_{ij} = K_{ij} + \nabla_l (t^l D_t f_{ij}),$$

то

$$\varepsilon_{\mathbf{g}} = \frac{1}{2} K + \varphi^2 + t^l \nabla_l \varphi.$$

Согласно (13)

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2} K + \varphi^2 + t^l \nabla_l \varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2} P^i_j P^j_i.$$

Отсюда находим, что плотность энергии гравитационного поля имеет следующую структуру:

$$\varepsilon_{\mathbf{g}} = \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2} P^i_j P^j_i + \frac{1}{2} S = T + U,$$

где

$$T = \frac{1}{2}(P^i_i)^2 - \frac{1}{2} P^i_j P^j_i = \frac{1}{2}(TrP)^2 - \frac{1}{2} Tr(P^2) \tag{15}$$

есть плотность кинетической энергии и

$$U = \frac{1}{2} S \tag{16}$$

есть плотность потенциальной энергии гравитационного поля. Введем далее общековариантный максвелловский тензор К-поля и электромагнитного поля, полагая

$$N^i_j = h^i_k T^k_l h^l_j - \frac{1}{2} T h^i_j.$$

Отсюда следует, что первая группа уравнений гравитационного поля имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{d}} D_t(\sqrt{d}\, P^i_j) + S^i_j + N^i_j = \frac{1}{2}\varepsilon h^i_j. \tag{17}$$

Как видно из этой системы уравнений, скорость изменения импульса гравитационного поля со временем определяется тензором напряжений полной системы полей и ее плотностью энергии. Затем определяем вектор потока энергии гравитационного поля

$$G_j = h^i_j(\nabla_l P^l_i - \partial_i P^l_l)$$

и вектор потока энергии других физических полей

$$\Pi_i = \varepsilon_{\mathbf{m}}\, t_i - T_{ik} t^k.$$

Очевидно, что $(\mathbf{t}, \mathbf{G}) = (\mathbf{t}, \mathbf{\Pi}) = 0$. Вторая группа уравнений гравитационного поля означает, что вектор потока гравитационной энергии в точности равен вектору потока энергии рассматриваемых физических полей

$$G_i = \Pi_i. \tag{18}$$

Отсюда можно вывести, что коль скоро в некоторый объем физического пространства втекает какое-то количество гравитационной энергии, то столько же негравитационной формы энергии должно вытекать из этого объема. При этом суммарная энергия в рассматриваемом объеме остается неизменной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Так как К-поле не взаимодействует с фермионной материей, то можно заключить, что на нее воздействует создаваемое им гравитационное поле, и это воздействие заметно проявляется как геодезическое движение. Тогда естественно предположить, что ядро звезд представляет собой концентрацию энергии К-поля, а оболочка состоит из нападавшей на это ядро фермионной материи. Звезда может сбросить эту оболочку в форме взрыва и перестать светиться.

Не вызывает сомнений, что гравитационные волны переносят энергию и импульс, и результат их воздействия на фермионную материю можно попытаться зарегистрировать в виде установки, подобной той, которую использовал Лебедев для доказательства существования давления электромагнитного поля. Это была бы установка, позволяющая регистрировать гравитационные волны и направление, откуда они приходят.

Если К-поле создает сгусток гравитационной энергии, потенциальная энергия которого положительна, то это должно привести к расширению области пространства, занимаемой этим сгустком, и соответствующему изменению поведения фермионной материи, находящейся в этой области.

Становится понятным, что темная энергия — это просто энергия гравитационного поля и включение в теорию космологической постоянной увеличит ее плотность на постоянный фактор.

Свидетельства существования темной материи были обнаружены почти сто лет назад, но до сих пор подтверждено только гравитационное взаимодействие этой материи. Таким же свойством обладает К-поле, которое и следует поставить в соответствие темной материи. Поскольку К-поле не взаимодействует с фермионной материей, то ясно, где не нужно искать темную материю. Остается уповать только на закон сохранения энергии. Для начала можно обратиться к такому естественному физическому явлению, как солнечное затмение, и собрать факты о необычном поведении некоторых приборов в области тени, где плотность электромагнитной энергии заметно уменьшается и, следовательно, заметно возрастает плотность гравитационной энергии.

Конфликт интересов. Конфликта интересов нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Einstein A*. Entvurf Einer Verallgemeinerten Relativitatstheorie und Theorie der Gravitation // Z. Math. Phys. 1913. V. 62. P. 225–261 (Mit M. Grossmann).
2. *Einstein A*. Relativistic Theory of the Non-Symmetric Field. The Meaning of Relativity. 5th ed. Prinston, 1955.
3. *Pestov I. B.* Complete General Relativity // Phys. Part. Nucl. 2023. V. 54, No. 6. P. 1063–1065.